ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

11 • 2012

МАТЕМАТИКА

УДК 514.763.624

Член-корреспондент НАН Украины **А. А. Борисенко,**
С. В. Мирошниченко

О флаговой кривизне двумерных поверхностей трехмерных пространств Рандерса

Найдены достаточные условия положительности флаговой кривизны двумерных поверхностей трехмерных пространств Рандерса и доказана локальная выпуклость поверхностей с положительной флаговой кривизной.

1. Необходимые сведения и результаты. *Пространством Минковского* [1] M^{n+1} называется пара (V^{n+1}, F), где V^{n+1} — $(n+1)$-мерное векторное пространство с декартовыми координатами $y^1, \ldots, y^{n+1}$. *Норма Минковского* $F\colon V^{n+1} \to [0, \infty)$ обладает свойствами:

1) $F \in C^\infty(V^{n+1} \setminus \{0\})$;

2) для любого положительного q: $F(qy) = qF(y)$;

3) симметричная билинейная форма $g_{ij} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}$ положительно определена на V^{n+1}.

Метрика F, индуцируемая на поверхности $N \subset M^{n+1}$, является *финслеровой*, т. е. $F(x, y)\colon TN \to [0, +\infty)$ и для произвольной точки $p \in N$, $F\mid_{T_pN}$ — норма Минковского на T_pN.

Пространством Рандерса R_b^{n+1} будем называть пространство Минковского с нормой F вида

$$F(y) = \|y\|_E + \beta(y), \tag{1}$$

где

$$\|y\|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} (y^i)^2} \text{ — евклидова норма,} \qquad \beta(y) = b_i y^i \text{ — линейная форма.}$$

Необходимым и достаточным условием того, что данная функция является нормой Минковского, есть условие на евклидову длину *главного вектора* $b = (b_1, \ldots, b_{n+1})\colon |b| < 1$. Условимся считать пространство неевклидовым, т. е. $|b| \neq 0$.

Будем рассматривать C^3-гладкую двумерную поверхность F^2 как множество точек в двух различных пространствах — в пространстве Рандерса (обозначая поверхность в таком случае $\widetilde{F}^2 \subset R_b^3$ с индуцированной финслеровой метрикой) и наложенном евклидовом пространстве ($F^2 \subset \mathbb{E}^3$ с индуцированной римановой метрикой).

Для F^2 через K_e обозначим гауссову кривизну индуцированной римановой метрики в произвольной точке $p \in F^2$. Главные кривизны в римановой метрике обозначим как k_1, k_2, считая, что $k_1 \leqslant k_2$, нормальную кривизну в некотором касательном направлении будем обозначать k, тогда известно, что $k_1 \leqslant k \leqslant k_2$.

Аналогом понятия секционной кривизны римановых пространств является *флаговая кривизна* финслеровых пространств [1], которая может быть определена как секционная кривизна римановой метрики

$$g_Y = \sqrt{g_{ij}(Y)u^i u^j} \tag{2}$$

для некоторого геодезического поля Y финслерового пространства, где g_{ij} — фундаментальная форма финслеровой метрики, определяемая аналогично пространствам Минковского.

В случае двумерных поверхностей флаговая кривизна является лишь функцией касательного направления Y, поскольку $\dim T_p\widetilde{F}^2 = 2$. Обозначим флаговую кривизну рассматриваемой гиперповерхности $\widetilde{F}^2$ в некотором направлении Y как $K_R(Y)$.

Лемма 1. *Пусть F^2 — C^3-гладкая двумерная поверхность в $\mathbb{E}^3$. Пусть n — единичная евклидова нормаль, y — некоторое касательное направление и $\gamma(s)$ — нормальная геодезическая индуцированной римановой метрики, для которой $\dot{\gamma}(0) = y$. Тогда флаговая кривизна $\widetilde{F}^2 \subset R_b^3$ выражается как*

$$K_R(y) = \frac{3}{4}\frac{(k(y)\langle b, n\rangle)^2}{F^4(y)} - \frac{1}{2}\frac{\dfrac{d}{ds}(k(y)\langle b, n\rangle)}{F^3(y)} + \frac{K_e}{F^2(y)}. \tag{3}$$

С использованием выражения (3) был построен пример того, что выпуклость не является необходимым условием положительности флаговой кривизны.

Был рассмотрен эллиптический параболоид $z = x^2 + y^2$, который является глобально выпуклой гиперповерхностью. Тогда флаговая кривизна данной поверхности в начале координат в касательном направлении $Y = (\cos t, \sin t, 0)$ может быть выражена как

$$K_R(Y) = \frac{4 + 6b_1 \cos t + 6b_2 \sin t}{(1 + b_1 \cos t + b_2 \sin t)^3} + \frac{3b_3^2}{(1 + b_1 \cos t + b_2 \sin t)^4}.$$

Очевидно, что для некоторого фиксированного вектора b флаговая кривизна меняет знак.

Однако существуют достаточные условия того, что выпуклость влечет за собой положительность флаговой кривизны.

Теорема 1 (первое достаточное условие положительности флаговой кривизны). *Пусть двумерная C^3-гладкая поверхность $F^2 \subset \mathbb{E}^3$ имеет положительную гауссову кривизну $K_e > 0$ и в каждой точке поверхности выполнено неравенство*

$$|b| < \frac{2\dfrac{k_1}{k_2}}{2\dfrac{k_1}{k_2} + 1}. \tag{4}$$

Если также вдоль каждой нормальной геодезической первая производная ее кривизны удовлетворяет неравенству

$$\left|\frac{dk}{ds}\right| < 2K_e\sqrt{3\left(\frac{k_1}{k_2} - \frac{|b|}{2(1-|b|)}\right)}, \tag{5}$$

то флаговая кривизна $\widetilde{F}^2 \subset R_b^3$ *положительна в любом касательном направлении.*

Интервал, ограничивающий производную кривизны геодезической dk/ds, может быть расширен, но с более сильными требованиями на $|b|$, а именно:

Теорема 2 (второе достаточное условие положительности флаговой кривизны). *Пусть двумерная* C^3*-гладкая поверхность* $F^2 \subset \mathbb{E}^3$ *имеет положительную гауссову кривизну* $K_e > 0$ *и в каждой точке поверхности выполнено неравенство*

$$|b| < \frac{-1+\sqrt{1+12\dfrac{k_1}{k_2}}}{2+\sqrt{1+12\dfrac{k_1}{k_2}}}. \tag{6}$$

Если также вдоль каждой нормальной геодезической первая производная ее кривизны удовлетворяет неравенству

$$\left|\frac{dk}{ds}\right| < K_e\left(\frac{3|b|}{2(1+|b|)}\frac{k_1}{k_2} - \frac{k_2}{k_1} + \frac{2(1-|b|)}{|b|}\right), \tag{7}$$

то флаговая кривизна $\widetilde{F}^2 \subset R_b^3$ *положительна в любом касательном направлении.*

Тем не менее положительность флаговой кривизны двумерной поверхности трехмерного пространства Рандерса гарантирует выполнение условия локальной выпуклости.

Теорема 3. *Пусть флаговая кривизна* C^3*-гладкой двумерной поверхности в трехмерном пространстве Рандерса положительна в любом касательном направлении, тогда поверхность является локально выпуклой.*

2. Доказательство основных результатов. Доказательство леммы 1. Для финслеровых пространств естественным образом можно вводить понятие локально кратчайших кривых (*геодезических*). По аналогии с римановыми пространствами, можно показать, что геодезическая $c(t)$ финслерового пространства (M, F) удовлетворяет системе дифференциальных уравнений второго порядка

$$\ddot{c}^i(t) + 2G^i(c(t), \dot{c}(t)) = 0,$$

где

$$G^i(x,y) = \frac{1}{4}g^{il}(x,y)([F^2]_{x^k y^l}y^k - [F^2]_{x^l}).$$

$G^i(y)$ называются *геодезическими коэффициентами.*

В работе [2] была получена упрощенная формула флаговой кривизны K_F двумерного финслерового пространства $\varphi\colon D \to S$, $D \subset \mathbb{R}^2$ в направлении касательного вектора $y = u\varphi_x + v\varphi_y \in T_pS$:

$$K_F(p,y) = \frac{1}{F^2(y)}(2G_x^1 + 2G_y^2 + 2G_u^1G_v^2 - 2G_u^2G_v^1 - Q^2 - Q_xu - Q_yv + 2G^1Q_u + 2G^2Q_v), \tag{8}$$

где $Q = G_u^1 + G_v^2$.

В некоторой окрестности произвольной точки p двумерной гиперповерхности $\widetilde{F}^2$ пространства Рандерса зададим поверхность явно $z = f(x, y)$ так, что выполнены следующие условия:

$$f(p) = 0, \qquad f_x(p) = f_y(p) = 0. \tag{9}$$

Из условия параметризации следует, что ось pz сонаправлена с вектором единичной евклидовой нормали n в точке p, которая для явно заданных поверхностей имеет вид

$$n = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}(-f_x, -f_y, 1). \tag{10}$$

В случае такой параметризации произвольный единичный касательный вектор $Y \in T_p\widetilde{F}^2$ имеет вид $Y = (u, v, uf_x + vf_y) = (u, v, 0)$. В таком случае, из общего вида нормы пространства (1), индуцированная метрика Рандерса имеет вид

$$F(Y) = \sqrt{(1 + f_x^2)u^2 + 2f_xf_yuv + (1 + f_y^2)v^2} + (b_1 + b_3f_x)u + (b_2 + b_3f_y)v. \tag{11}$$

Заметим, что всегда можем рассмотреть такую систему координат, что главный вектор пространства Рандерса имеет вид $b = (0, b_2, b_3)$, т. е. лежит в плоскости ypz.

Рассмотрим некоторую нормальную геодезическую $\gamma(s)$ индуцированной римановой метрики из наложенного евклидового пространства, для которой $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = Y_p$. В таком случае касательный вектор имеет вид $Y_p = (dx/ds, dy/ds, 0)$.

Подставляя метрику вида (11) в выражение (8), непосредственной группировкой коэффициентов перед степенями b_2 и b_3, получаем

$$K_R(Y) = \frac{3b_3^2k^2}{4(1 + r)^4} + \frac{1}{2}\frac{b_2k(uf_{xy} + vf_{yy}) - b_3\frac{dk}{ds}}{(1 + r)^3} + \frac{K_e}{(1 + r)^2}.$$

С учетом параметризации геодезической $\gamma(s)$

$$b_2(uf_{xy} + vf_{xy}) = b_2\left(f_{xy}\frac{dx}{ds} + f_{yy}\frac{dy}{ds}\right) = b_2\frac{df_y}{ds} = -\frac{d}{ds}(-b_2f_y + b_3) = -\frac{d}{ds}\langle b, n\rangle\bigg|_p.$$

Используя определение нормы Рандерса (1), получаем

$$1 + r = 1 + b_2v = 1 + \langle b, Y\rangle = F(Y).$$

Данные упрощения приводят формулу к виду (3). Заметим, что при замене координат таким образом, что главный вектор b не лежит в плоскости ypz, формула флаговой кривизны остается верной, так как скалярное произведение не зависит от выбора системы координат.

Доказательство теоремы 1. В некоторой окрестности произвольной точки $p \in \widetilde{F}^2$ поверхность задается явно $z = f(x, y)$. Таким образом,

$$f(p) = 0, \qquad f_x(p) = f_y(p) = f_{xy}(p) = 0.$$

В таком случае ось pz сонаправлена с вектором единичной евклидовой нормали n. Пусть в данной системе координат главный вектор b имеет вид $b = (b_1, b_2, b_3)$, где $b_3 = \langle b, n\rangle$.

Для некоторого касательного направления $\tau \in T_p\widetilde{F}^2$, $\tau = (u, v, 0)$ рассмотрим нормальную геодезическую $\gamma(s)$ такую, что $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = \tau$. Тогда (3) в направлении τ принимает вид

$$K_R(\tau) = \frac{3}{4}\frac{b_3^2 k^2(\tau)}{F^4(\tau)} + \frac{1}{2}\frac{k(\tau)(b_1 u f_{xx} + b_2 v f_{yy}) - b_3 \dfrac{dk}{ds}(\tau)}{F^3(\tau)} + \frac{K_e}{F^2(\tau)}. \tag{12}$$

Можем считать, что $u = \cos t$, $v = \sin t$, тогда оценим выражения $c(t) = b_1 f_{xx} \cos t + b_2 f_{yy} \sin t$ и $F(\tau) = 1 + \langle b, \tau \rangle$. Заметим, что f_{xx}, f_{yy} — это главные кривизны в точке p, тогда

$$-k_2|b| \leqslant -k_2\sqrt{b_1^2 + b_2^2} \leqslant c(t) \leqslant k_2\sqrt{b_1^2 + b_2^2} \leqslant k_2|b|, \qquad 0 < 1 - |b| \leqslant F(\tau) \leqslant 1 + |b|. \tag{13}$$

Можем рассмотреть выражение для флаговой кривизны $K_R(\tau)$ как квадратный трехчлен от переменной b_3. Достаточным условием того, что $K_R(\tau) > 0$, есть условие на отрицательность дискриминанта, так как коэффициент при старшем члене строго положителен: $\left(\dfrac{dk(\tau)}{ds}\right)^2 < 12k^2(\tau)\left(K_e + \dfrac{ck(\tau)}{2F(\tau)}\right)$, что эквивалентно системе

$$\begin{cases} \left|\dfrac{dk(\tau)}{ds}\right| < 2k(\tau)\sqrt{3\left(K_e + \dfrac{ck(\tau)}{2F(\tau)}\right)}, \\ K_e + \dfrac{ck(\tau)}{2F(\tau)} > 0. \end{cases} \tag{14}$$

Используя оценки (13), получаем

$$2k(\tau)\sqrt{3\left(K_e + \frac{ck(\tau)}{2F(\tau)}\right)} \geqslant 2K_e\sqrt{\frac{k_1}{k_2} - \frac{|b|}{2(1 - |b|)}}.$$

Тогда потребуем выполнения следующих двух условий, которые обеспечат выполнение условий системы (14):

$$\frac{k_1}{k_2} - \frac{|b|}{2(1 - |b|)} > 0, \qquad \left|\frac{dk(\tau)}{ds}\right| < 2K_e\sqrt{3\left(\frac{k_1}{k_2} - \frac{|b|}{2(1 - |b|)}\right)}.$$

Теорема доказана в силу произвольности выбора касательного направления.

Доказательство теоремы 2. Повторяя рассуждения доказательства предыдущей теоремы, рассмотрим выражение для флаговой кривизны гиперповерхности пространства Рандерса в направлении τ (12) как квадратный трехчлен от переменной $b_3 \leqslant |b|$.

Вторым достаточным условием того, что $K_R(\tau) > 0$, является условие на то, что для вещественных корней данного трехчлена $x_- \leqslant x_+$ выполнено $x_- > |b|$ или $x_+ < -|b|$, при условии, что они существуют. Непосредственной подстановкой получаем

$$x_\pm = \frac{\dfrac{dk(\tau)}{ds} \pm \sqrt{\left(\dfrac{dk(\tau)}{ds}\right)^2 - 12k^2(\tau)\left(K_e + \dfrac{ck(\tau)}{2F(\tau)}\right)}}{\dfrac{3k^2(\tau)}{F(\tau)}}.$$

То есть выполняется одна из следующих систем неравенств:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{dk(\tau)}{ds}\right)^2 \geqslant 12k^2(\tau)\left(K_e + \dfrac{ck(\tau)}{2F(\tau)}\right), \\ |b| < x_- \end{cases} \tag{15}$$

или

$$\begin{cases} \left(\dfrac{dk(\tau)}{ds}\right)^2 \geqslant 12k^2(\tau)\left(K_e + \dfrac{ck(\tau)}{2F(\tau)}\right), \\ x_+ < -|b|. \end{cases} \tag{16}$$

Рассмотрим систему (15), она эквивалентна

$$\begin{cases} K_e + \dfrac{ck(\tau)}{2F(\tau)} > 0, \\ \left|\dfrac{dk(\tau)}{ds}\right| \geqslant 2k(\tau)\sqrt{3\left(K_e + \dfrac{ck(\tau)}{2F(\tau)}\right)}, \\ \dfrac{dk(\tau)}{ds} > \dfrac{3k^2(\tau)|b|}{F(\tau)}, \\ \dfrac{dk(\tau)}{ds} < \dfrac{3k^2(\tau)|b|}{2F(\tau)} + \dfrac{2F(\tau)}{|b|}\left(K_e + \dfrac{ck(\tau)}{2F(\tau)}\right). \end{cases} \tag{17}$$

Объединим данные требования с ограничением из системы (14). Чтобы множество требуемых значений для $dk(\tau)/ds$ было связным, потребуем выполнения условия

$$\frac{3k^2(\tau)|b|}{F(\tau)} < 2k(\tau)\sqrt{3\left(K_e + \frac{ck(\tau)}{2F(\tau)}\right)}.$$

Таким образом, окончательные условия примут вид

$$K_e > \frac{3k^2(\tau)|b|^2}{4F^2(\tau)} - \frac{ck(\tau)}{2F(\tau)}, \tag{18}$$

$$\left|\frac{dk(\tau)}{ds}\right| < \frac{3k^2(\tau)|b|}{2F(\tau)} + \frac{2F(\tau)}{|b|}\left(K_e + \frac{ck(\tau)}{2F(\tau)}\right). \tag{19}$$

Используя оценки (13), получаем, что для правой части неравенства (18) выполнено

$$\frac{3k^2(\tau)|b|^2}{4F(\tau)^2} - \frac{ck(\tau)}{2F(\tau)} \leqslant 3k_2^2\frac{|b|^2}{4(1-|b|)^2} + k_2^2\frac{|b|}{2(1-|b|)}.$$

Тогда потребуем выполнения условия

$$\frac{k_1}{k_2} > 3\frac{|b|^2}{4(1-|b|)^2} + \frac{|b|}{2(1-|b|)}, \tag{20}$$

что обеспечит выполнение неравенства (18).

Аналогично, используя (13) для правой части неравенства (19), получаем выполнение

$$\frac{3k^2(\tau)|b|}{2F(\tau)} + \frac{2F(\tau)}{|b|}\left(K_e + \frac{ck(\tau)}{2F(\tau)}\right) \geqslant K_e\left(\frac{3|b|}{2(1+|b|)}\frac{k_1}{k_2} - \frac{k_2}{k_1} + \frac{2(1-|b|)}{|b|}\right),$$

тогда, потребовав выполнения неравенства

$$\left|\frac{dk(\tau)}{ds}\right| < K_e\left(\frac{3|b|}{2(1+|b|)}\frac{k_1}{k_2} - \frac{k_2}{k_1} + \frac{2(1-|b|)}{|b|}\right),$$

обеспечим выполнение неравенства (19).

Аналогичные рассуждения для системы (16) приводят к тому же результату.

Условие (20) может быть записано как $|b| < \dfrac{-1+\sqrt{1+12k_1/k_2}}{2+\sqrt{1+12k_1/k_2}}$, а условие на $|b|$ из предыдущей теоремы имеет вид $|b| < \dfrac{2k_1/k_2}{2k_1/k_2+1}$. Непосредственным сравнением несложно показать, что $\dfrac{-1+\sqrt{1+12x}}{2+\sqrt{1+12x}} < \dfrac{2x}{2x+1}$ при $x > 0$.

Так как касательное направление τ было выбрано произвольно, то теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Предположим противное, т. е. считаем, что в некоторой точке p флаговая кривизна положительна для всех касательных направлений, но поверхность локально не является выпуклой $K_e \leqslant 0$. Тогда в точке p существует асимптотическое направление y_1, т. е. $k(y_1) = 0$. Заметим, что тогда и $-y_1$ является асимптотическим. Воспользуемся формулой (3) в направлениях y_1 и $-y_1$

$$K_R(\pm y_1) = -\frac{1}{2}\frac{\langle b, n\rangle}{F^3(\pm y_1)}\frac{dk}{ds}(\pm y_1) + \frac{K_e}{F^2(\pm y_1)} > 0.$$

Или иначе

$$K_e > \frac{\langle b, n\rangle}{2F(\pm y_1)}\frac{dk}{ds}(\pm y_1).$$

Если $\langle b, n\rangle = 0$, то теорема верна.

Если $\langle b, n\rangle < 0$, то выбираем одно из направлений y_1 или $-y_1$, в котором $dk/ds \leqslant 0$, т. е. $K_e > a^2 \geqslant 0$, что приводит к противоречию. Аналогичное рассуждение верно при $\langle b, n\rangle > 0$.

1. *Shen Z.* Lectures on Finsler geometry. – Singapore: World Scientific, 2001. – 307 p.
2. *Bao D., Chern S.-S., Shen Z.* An introduction to Riemann–Finsler geometry. – New York: Springer, 2000. – 431 p.

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина

Поступило в редакцию 04.05.2012

Член-кореспондент НАН України **О. А. Борисенко, С. В. Мірошниченко**

Про флагову кривизну двовимірних поверхонь тривимірних просторів Рандерса

Знайдено достатні умови додатності флагової кривини двовимірних поверхонь тривимірних просторів Рандерса і доведено локальну опуклість поверхонь з додатною флаговою кривиною.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. A. Borisenko, S. V. Miroshnichenko**

On the flag curvature of 2D surfaces of 3D Randers spaces

We find the sufficient conditions for the positivity of the flag curvature of two-dimensional surfaces of three-dimensional Randers spaces and prove the local convexity of surfaces with positive flag curvature.